К. ф.-м. н. Шалагинов С. Д., к. ф.-м. н. Девятков А. П.

Тюменский государственный университет, Российская Федерация

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $u(x) = u(x_1,...,x_n)$, заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется субгармонической в D (см., например, [1]), если она полунепрерывна сверху и для любой точки $x \in D$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех $0 < r < \delta$ выполнено неравенство

$$u(x) \le \frac{1}{\omega_n(r)} \int\limits_{S(x,r)} u(t)d\sigma(t),$$

где $S(x,r) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \mid |x-t| < r \right\}$ – сфера с центром в точке x радиуса r; $\omega_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$ – $n-1$-мерная площадь сферы ;

$S(x,r)$, $d\sigma$ – элемент площади. Таким образом, значение субгармонической функции в центре сферы не превосходит её среднего значения на этой сфере.

Напомним также нужное нам понятие выпуклой функции. Функция $\varphi(y) = \varphi(y_1,..., y_m)$, заданная на выпуклом множестве $E \subset \mathbb{R}^m$ называется выпуклой вниз, если для любых точек $y_0, y_1 \in E$ и любого числа $0 < \lambda < 1$ выполнено неравенство

$$\varphi((1-\lambda) y_0 + \lambda y_1) \le (1-\lambda)\varphi(y_0) + \lambda\varphi(y_1)$$

Для выпуклых функций выполняется неравенство Йенсена

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(T)} \int\limits_T u(t) d\mu(t) \right) \le \frac{1}{\mu(T)} \int\limits_T \varphi(u(t)) d\mu(t),$$

где $u: T \to E$ – векторная функция, определенная на некотором множестве T с заданной на нем положительной конечной мерой μ.

Для двух точек $y, y' \in \mathbb{R}^m$ будем писать $y \le y'$, если $y_i \le y_i'$ при всех $1 \le i \le m$.

Целью данной заметки является доказательство следующих утверждений:

Теорема 1. *Пусть функции* $u_1(x),...,u_m(x)$ *являются гармоническими в* *области* $D \subset \mathbb{R}^n$*, множество* $E \subset \mathbb{R}^m$ *выпукло и* $\varphi(y)$ *– выпуклая вниз функция на* E*. Если* $u(x) = (u_1(x),...,u_m(x)) \in E$ *для любого* $x \in D$*, то сложная функция* $\varphi(u(x)) = \varphi(u_1(x),...,u_m(x))$ *является субгармонической в* D*.*

Теорема 2. *Пусть функции* $u_1(x),...,u_m(x)$ *являются субгармоническими в области* $D \subset \mathbb{R}^n$*, выпуклое множество* $E \subset \mathbb{R}^m$ *обладает тем свойством, что из* $y \in E, y \le y'$ *следует* $y' \in E$*, функция* $\varphi(y)$ *выпукла вниз на* E *и из* $y \in E, y \le y'$ *следует* $\varphi(y) \le \varphi(y')$*. Если* $u(x) = (u_1(x),...,u_m(x)) \in E$ *для любого* $x \in D$*, то сложная функция* $\varphi(u(x)) = \varphi(u_1(x),...,u_m(x))$ *является субгармонической в* D*.*

Доказательство теоремы 1. Значение гармонической функции в центре сферы равно её среднему значению на этой сфере. Следовательно, для любой точки $x \in D$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого $0 < r < \delta$ выполнено равенство

$$u_i(x) = \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} u_i(t)d\sigma(t), \quad i = 1,...,m .$$

Для вектор-функции $u(x) = (u_1(x),...,u_m(x))$ имеем

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} u(t)d\sigma(t) .$$

Используя неравенство Йенсена, получаем

$$\varphi(u(x)) = \varphi\left(\frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} u(t)d\sigma(t) \right) \le \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} \varphi(u(t))d\sigma(t) .$$

Таким образом, $\varphi(u(x))$ – субгармоническая функция.

Доказательство теоремы 2. Для вектор-функции $u(x) = (u_1(x),...,u_m(x))$ имеем

$$u(x) \le \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} u(t)d\sigma(t) .$$

Используя заданное условие монотонности функции $\varphi(y)$ и неравенство Йенсена, получаем

$$\varphi(u(x)) \le \varphi\left(\frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} u(t)d\sigma(t) \right) \le \frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S(x,r)} \varphi(u(t))d\sigma(t) .$$

Таким образом, $\varphi(u(x))$ – субгармоническая функция.

Приведем **примеры** использования доказанных теорем.

1) Функция $\varphi(y)=|y|$ выпукла вниз на $\mathbb{R}^1$. Поэтому для любой гармонической в области $D\subset\mathbb{R}^n$ функции $u(x)$ функция $|u(x)|$ субгармонична в D.

2) Функция $\varphi(y_1,...,y_m)=\left(|y_1|^p+...+|y_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ при $p\geq 1$ является выпуклой вниз на $\mathbb{R}^m$. Поэтому для любых гармонических в области $D\subset\mathbb{R}^n$ функций $u_1(x),...,u_m(x)$ функция $\left(|u_1(x)|^p+...+|u_m(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ субгармонична в D.

3) Та же функция $\varphi(y_1,...,y_m)=\left(|y_1|^p+...+|y_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ при $p\geq 1$ возрастает (в смысле теоремы 2) на выпуклом множестве $E=\left\{y\in\mathbb{R}^m \mid y\geq 0\right\}$. Поэтому для *неотрицательных* субгармонических в области $D\subset\mathbb{R}^n$ функций $u_1(x),...,u_m(x)$ функция $\left(u_1(x)^p+...+u_m(x)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ субгармонична в D.

4) Функция $\varphi(y_1,...,y_m)=\max\left\{y_1,...,y_m\right\}$ выпукла вниз и возрастает на всем $\mathbb{R}^m$. Поэтому для любых субгармонических в области $D\subset\mathbb{R}^n$ функций $u_1(x),...,u_m(x)$ функция $\max\left\{u_1(x),...,u_m(x)\right\}$ субгармонична в D.

Список использованных источников:

1. Хейман У. «П. Кеннеди. Субгармонические функции» / У. Хейман. – М.: Мир, 1980. – 304 с.