К. т. н. Меркт Р. В., к. т. н. Челабчи В. Н., Челабчи В. В.

Одесский национальный морской университет, Украина

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ

Проекционное решение обыкновенных дифференциальных уравнений базируется на вариационном подходе. Основная идея метода заключается в том, что на отрезках **z** оси независимой переменной $\boldsymbol{\tau}$ в качестве решения **Y** принимается функция определенного типа, но с неизвестными пока параметрами (коэффициентами). Аппроксимирующая функция и ее производные не должны иметь разрывов.

Выражения для функции и ее производных подставляются в решаемое уравнение. Записывается выражение для функционала S, который представляет собой сумму квадратов невязок (разностей значений правой и левой частей уравнения) для ряда значений независимой переменной. Коэффициенты аппроксимирующей функции находятся путем минимизации функционала S. Можно использовать либо методы безусловной оптимизации, либо прямые методы.

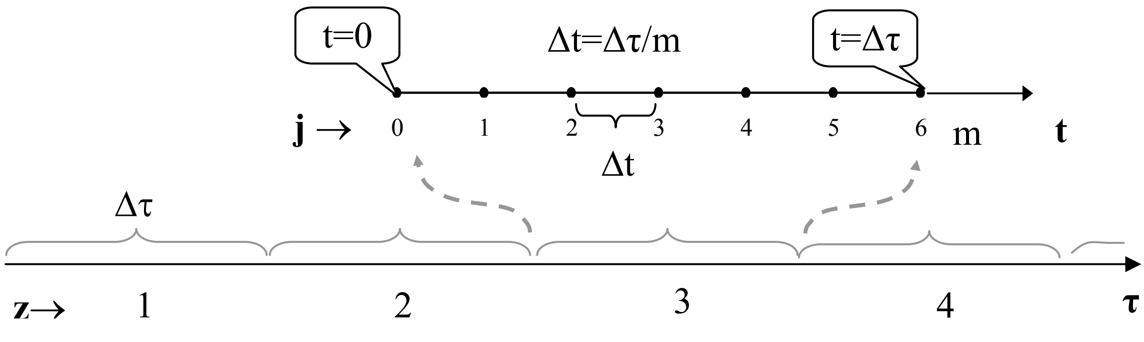

Рис. 1. Схема индексации узлов сетки при проекционном решении

В пределах каждого отрезка $\boldsymbol{\Delta\tau}$ используется локальная независимая переменная **t**. Таким образом, создается последовательность отрезке **z**, каждый из которых включает достаточное количество внутренних узловых точек **j**.

Основы методики рассматриваются на примере решение обыкновенного дифференциального уравнения $1^{го}$ порядка (1).

$$A \cdot \frac{dY}{d\tau} + Y = D \cdot X \qquad \tau = 0, \quad Y = Y_0, \tag{1}$$

где A, D – заданные коэффициенты уравнения, X – воздействие.

В качестве функции аппроксимирующей решение **Y** на каждом отрезке интегрирования удобно принять полином $kn^{ой}$ степени (2).

$$Y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_k \cdot t^k + \cdots + a_{kn} \cdot t^{kn} = \sum_{k=0}^{kn} a_k \cdot t^k . \tag{2}$$

Соответственно выражения для первой производной имеет вид (3).

$$Y' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t + \cdots + k \cdot a_k \cdot t^{k-1} + \cdots + kn \cdot a_{kn} \cdot t^{kn-1} = \sum_{k=1}^{kn} k \cdot a_k \cdot t^{k-1} , \tag{3}$$

где $a_1 \div a_{kn}$ – коэффициенты полинома, подлежащие определению.

Значения коэффициента a_0 определяется из удовлетворения начальному условию или решению полученному на предыдущем отрезке интегрирования.

$$a_0 = Y_0. \tag{4}$$

Подставляя выражения для **Y** и **Y′** в решаемое уравнение получим (5).

$$\sum_{k=1}^{kn} \left[a_k \cdot \left(A \cdot k \cdot t^{k-1} + t^k \right) \right] = D \cdot X - a_0 . \tag{5}$$

Сумма квадратов невязок (разностей значений правой и левой частей уравнения) по всем точкам рассматриваемого отрезка интегрирования (j=0÷m) имеет вид (6).

$$S = \sum_{j=0}^{m} \left\{ \sum_{k=1}^{kn} \left[a_k \cdot \left(A \cdot k \cdot t_j^{k-1} + t_j^k \right) \right] - D \cdot X_j + a_0 \right\}^2 . \tag{6}$$

Значение функционала S будет минимальным при выполнении ряда условий (7).

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial a_{kn}} = 0. \tag{7}$$

Удовлетворяя каждому приведенному условию можно записать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Коэффициенты матрицы (MA) и элементы вектора правой части (MB) определяются по зависимостям (8).

$$
\begin{aligned}
MA_{L,C} &= \sum_{j=0}^{m}\left(A\cdot C\cdot t_j^{C-1}+t_j^{C}\right)\cdot\left(A\cdot L\cdot t_j^{L-1}+t_j^{L}\right),\\
MB_{L} &= \sum_{j=0}^{m}\left(D\cdot X_j-a_0\right)\cdot\left(A\cdot L\cdot t_j^{L-1}+t_j^{L1}\right).
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

где L – индекс строки матрицы (line), C – индекс столбца (column).

При решении задачи в нелинейной постановке значения коэффициентов A, и D уравнения (1) уточняются итерационно.

Если воздействие X задается не аналитическим выражением (а, например, табулированными зашумленными экспериментальными данными) проводится предварительная аппроксимация экспериментальных значений X подходящей функцией. При этом рекомендуется использовать процедуру сглаживания [1].

Качество решения можно оценивать согласно [2] по значению Rp^2 (9).

$$
Rp^{2} = 1-\delta\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{m} Y_i^{2}-\left(\sum_{j=1}^{m} Y_i\right)^{2}\Bigg/m\right), \qquad (9)
$$

$$
\delta=\sum_{j=0}^{m}\left(Y_j-K\cdot X_j+A\cdot\left(\sum_{k=1}^{kn} k\cdot a_k\cdot t_j^{k-1}\right)\right)^{2}
$$

где δ – сумма квадратов невязок,

Y_i – значение функции (полученное решение),

m – количество узлов на отрезке интегрирования (вспомогательная ось t).

При настройке решения на каждом отрезке $\Delta\tau$ осуществляется управляемый подбор значений **kn, m** с целью обеспечения желаемого уровня погрешности решения. Уровень погрешности решения можно оценивается по значению Rp^2 (например, как в [2]).

Авторы предлагают для оценки эффективности проекционного решения использовать среднеквадратичное значение относительной невязки σ_o (10).

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{m} \frac{A \cdot Y'_j + Y_j - K \cdot X_j}{G_j}}{m+1}}, \qquad (10)$$

где $G_j = \max\left(\left|A \cdot Y'_j\right|, \left|Y_j\right|, \left|K \cdot X_j\right|\right)$.

Для выявления корреляции между максимальными (δYmax) и средними (δYsr) значениями относительной погрешности решения и оценкой $\boldsymbol{\sigma_o}$ проводилось проекционное численное решения уравнения (1) при различных видах воздействия и при вариации параметров настройки **Δτ, kn, m.** Численное решение сравнивалось с точным аналитическим решением. Относительная погрешность нормировалась по максимальному изменению значения Y в пределах всего переходного процесса.

Результаты исследований представлены на рис. 2.

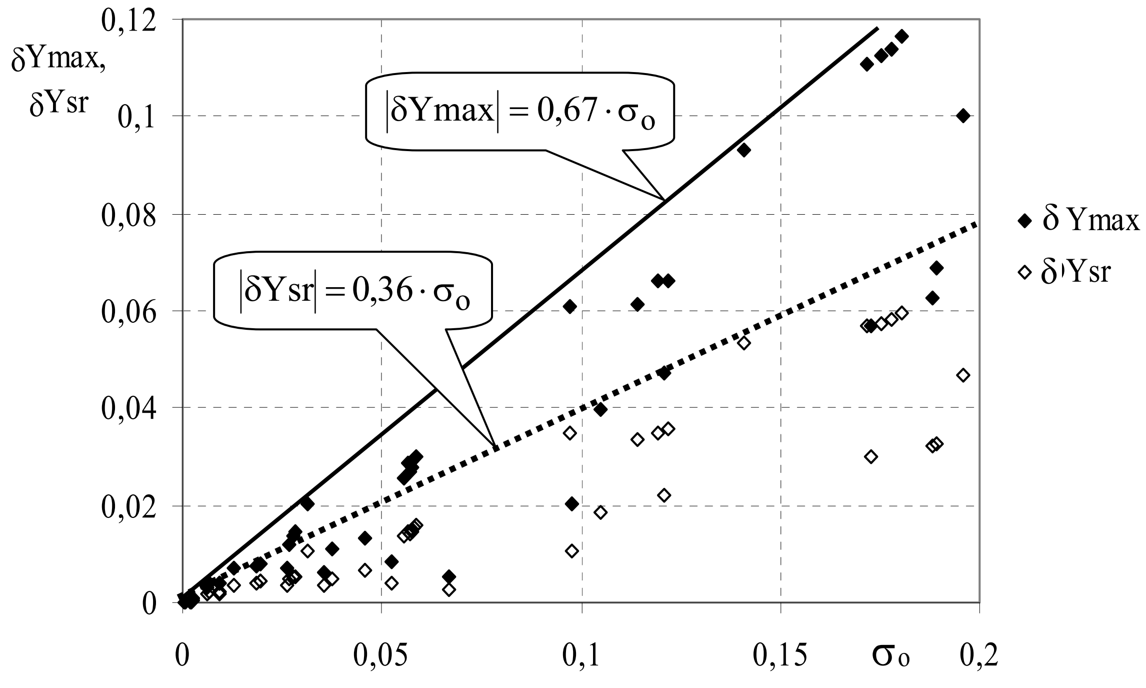

Рис. 2 Зависимость уровня относительных погрешностей решения от σ_o

На рис. 2 сплошными линиями выделены области, в которых обеспечивается заданный уровень относительной погрешности проекционного решения.

При настройке выбирается желательный уровень относительной погрешности решения $\delta Ymax$ или δYsr. Для обеспечения заданного уровня относительной погрешности решения необходимо выполнение условий (11).

$$\sigma_o \le 2.78 \cdot \delta Ysr \text{ или } \sigma_o \le 1.49 \cdot \delta Ymax. \qquad (11)$$

Для выполнения условий (11) итерационным путем подбираются значения **kn** и **m.** В первом приближении принимаются минимальные значения, например, kn=3 и m=a· kn. Рекомендуется $a = 5 \div 7$. Итерационное увеличение значений **kn** и **m** прекращается при выполнении (11).

Предлагаемая методика настройки проекционно-сеточного решения разработана и применялась для численного решения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Список использованных источников:

1. Меркт Р. В. Особенности сглаживания экспериментальных зависимостей методом скользящих отрезков / Р. В. Меркт, В. В. Челабчи, В. Н. Челабчи // Сб. науч. трудов по матер. междунар. науч.-практ. конф. «Современные направления теоретических и прикладных исследований ‘2011». – О.: Черноморье, 2011. – Т. 8. – С. 18–22.
2. Челабчи В. В. Оперативное управление проекционно-сеточным методом при решении обыкновенных дифференциальных уравнений / В. В. Челабчи // Сб. науч. трудов SWorld: матер. междунар. науч.-практ. конф. «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании ‘2012». – О.: КУПРИЕНКО, 2012. – Вып. 4. – Т. 3. – С. 49–53.